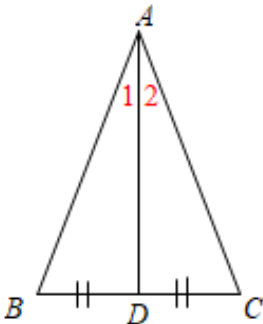


第1讲等腰三角形进阶

一、等腰三角形的性质与判定

	性质	等腰三角形的两个底角相等 (简写成“ <u>等边对等角</u> ”)	等腰三角形的顶角平分线、底边上的中线、底边上的高相互重合 (简写成“ <u>三线合一</u> ”)
	判定	利用定义来判定：有两条边相等的三角形叫做等腰三角形。	如果一个三角形有两个角相等，那么这两个角所对的边也相等 (简称“ <u>等角对等边</u> ”)

【备注】【注意1】

1. 等腰三角形两腰相等是证明两底角相等的依据；“三线合一”是证明两角相等、两线段相等及两直线互相垂直的依据；

2. 等腰三角形中顶角平分线、底边上的中线、底边上的高这三个条件中**已知一个条件可直接得到另外两个条件**

【注意2】

(1) 判定等腰三角形的定理只有上述两种

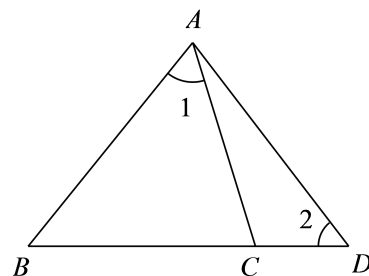
①两条边等→等腰；②等角对等边→等腰

(2) 如若知道“顶角角分线、底边垂线、底边中线”的任意两组，也是可以判定其为等腰三角形的，但是，必须通过证全等来导出边等或角等才可以得到等腰

🍌 举个栗子

栗子1

1. 如图，已知 $AB = AD = BC$ ，那么 $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 之间的关系是()。



A. $\angle 1 = 2\angle 2$

B. $2\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$

C. $\angle 1 + 3\angle 2 = 180^\circ$

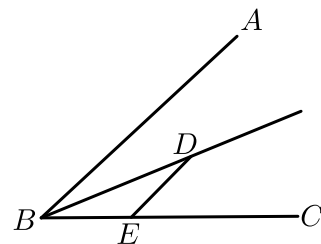
D. $3\angle 1 - 2\angle 2 = 180^\circ$

【答案】B

【解析】 $\because AB = BC$,
 $\therefore \angle 1 = \angle BCA$,
 $\because AB = AD$,
 $\therefore \angle B = \angle 2$,
 $\because \angle 1 + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$,
 $\therefore 2\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$,
故选B .

【标注】【知识点】等腰三角形的性质-等边对等角

2. 如图, $\angle ABC = 50^\circ$, BD 平分 $\angle ABC$, 过 D 作 $DE \parallel AB$ 交 BC 于点 E , 若点 F 在 AB 上, 且满足 $DF = DE$, 则 $\angle DFB$ 的度数为 _____ .



【答案】 130° 或 50°

【解析】如图, $DF = DF' = DE$.

$\because BD$ 平分 $\angle ABC$, 由图形的对称性可知:

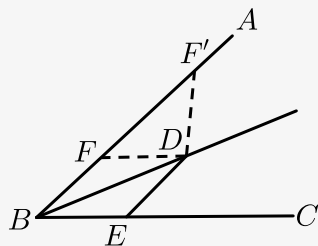
$$\triangle BDE \cong \triangle BDF ,$$

$$\therefore \angle DFB = \angle DEB .$$

$$\because DE \parallel AB ,$$

$$\angle ABC = 50^\circ ,$$

$\therefore$



$$\angle DEB = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ .$$

$$\therefore \angle DFB = 130^\circ .$$

当点 F 位于点 F' 处时,

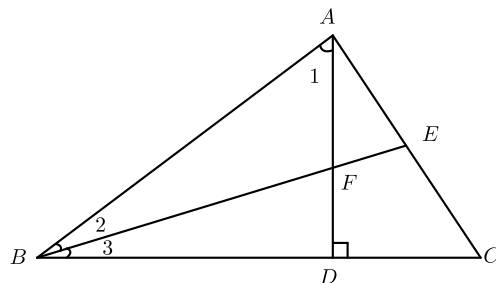
$$\because DF = DF' ,$$

$$\therefore \angle DF'B = \angle DFF' = 50^\circ ,$$

故答案是: 50° 或 130° .

栗子2

3. 如图所示，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $AD \perp BC$ 于点 D ， BE 平分 $\angle ABC$ ，交 AD 于点 F ，交 AC 于点 E 。求证： $\triangle AEF$ 是等腰三角形。



【答案】证明见解析。

【解析】方法一：在 $\triangle BAE$ 中，

$$\therefore \angle BAE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 2 + \angle AEF = 90^\circ,$$

在 $\triangle BFD$ 中，

$$\therefore AD \perp BC,$$

$$\therefore \angle BDF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 + \angle BFD = 90^\circ,$$

$$\therefore BE \text{ 平分 } \angle ABC,$$

$$\therefore \angle 2 = \angle 3,$$

$$\therefore \angle AEF = \angle BFD,$$

$$\therefore \angle AFE = \angle BFD \text{ (对顶角相等)},$$

$$\therefore \angle AEF = \angle AFE,$$

$$\therefore AE = AF \text{ (等角对等边)}.$$

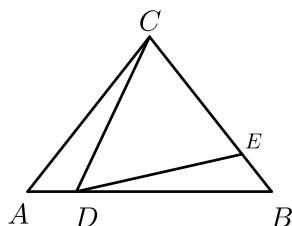
$$\therefore \triangle AEF \text{ 是等腰三角形}.$$

方法二： $\because \angle BAC = 90^\circ, AD \perp BC$ ，
 $\therefore \angle ABC + \angle C = 90^\circ, \angle ABC + \angle 1 = 90^\circ$ ，
 $\therefore \angle 1 = \angle C$ （同角的余角相等），
 又 $\because BE$ 平分 $\angle ABC$ ，
 $\therefore \angle 2 = \angle 3$ ，
 $\therefore \angle 1 + \angle 2 = \angle C + \angle 3$ ，
 $\therefore \angle AFE = \angle 1 + \angle 2, \angle AEF = \angle C + \angle 3$ （三角形外角的性质），
 $\therefore \angle AFE = \angle AEF$ ，
 $\therefore AE = AF$ （等角对等边），
 $\therefore \triangle AEF$ 是等腰三角形。

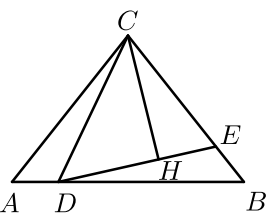
【标注】【知识点】等腰三角形的判定-等角对等边

独步天下1

4. 如图，在等腰三角形 $\triangle ABC$ 中， $AC = BC$ ， D 、 E 分别为 AB 、 BC 上一点， $\angle CDE = \angle A$ 。



图①



图②

- (1) 如图①，若 $BC = BD$ ，求证： $CD = DE$ 。
 (2) 如图②，过点 C 作 $CH \perp DE$ ，垂足为 H ，若 $CD = BD, EH = 1$ ，求 $DE - BE$ 的值。

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 2

【解析】 (1) 解： $\because AC = BC, \angle CDE = \angle A$ ，

$$\therefore \angle A = \angle B = \angle CDE,$$

$$\therefore \angle ACD = \angle BDE,$$

又 $\because BC = BD$,

$\therefore BD = AC$,

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BED$ 中,

$$\begin{cases} \angle ACD = \angle BDE \\ AC = BD \\ \angle A = \angle B \end{cases},$$

$\therefore \triangle ADC \cong \triangle BED(ASA)$,

$\therefore CD = DE$.

(2) 解: $\because CD = BD$,

$\therefore \angle B = \angle DCB$,

又 $\because \angle CDE = \angle B$,

$\therefore \angle DCB = \angle CDE$,

$\therefore CE = DE$,

如图,在 DE 上取点 F ,使得 $FD = BE$,

在 $\triangle CDF$ 和 $\triangle DBE$ 中,

$$\begin{cases} DF = BE \\ \angle CDE = \angle B \\ CD = BD \end{cases},$$

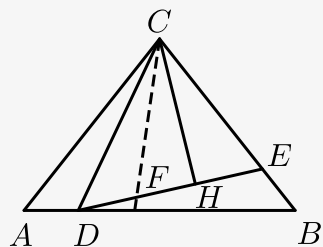
$\therefore \triangle CDF \cong \triangle DBE(SAS)$,

$\therefore CF = DE = CE$,

又 $\because CH \perp EF$,

$\therefore FH = HE$,

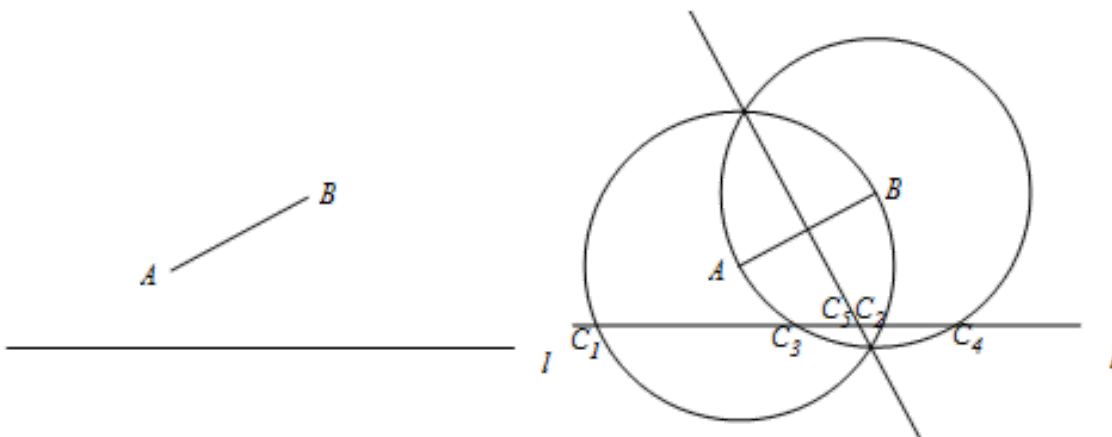
$\therefore DE - BE = DE - DF = EF = 2HE = 2$.



【标注】【知识点】一线三等角模型

二、等腰三角形存在性

如图所示,在直线 l 上找一点 C ,使得 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

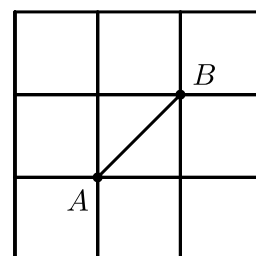


- (1) $AB = AC$ ，以 A 为圆心， AB 为半径画圆，交直线 l 于两点 C_1 、 C_2 ；
 (2) $AB = BC$ ，以 B 为圆心， AB 为半径画圆，交直线 l 于两点 C_3 、 C_4 ；
 (3) $AC = BC$ ，作 AB 的中垂线交直线 l 于 C_5 。

【备注】 两圆一线这部分解题的思路就是构造两个圆及一个垂直平分线。当腰为已知线段时，分别以两个端点为圆心、以已知线段长度为半径画圆，这个圆上任何一个点都能满足长度和已知线段相等，只要选取在目标上的点即可；当已知线段为底时，利用线段垂直平分线的性质找出腰。

栗子3

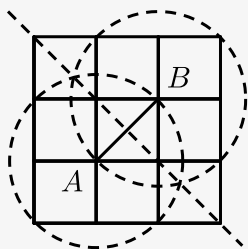
5. 如图所示的正方形网格中，网格线的交点称为格点。已知 A 、 B 是两格点，如果 C 也是图中的格点，且使得 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，则点 C 的个数是（ ）。



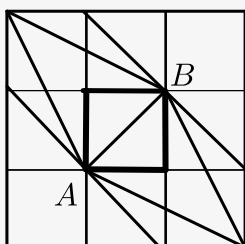
- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

【答案】 C

【解析】 方法一：以 AB 为半径， B 、 A 分别为圆心作圆，所交格点即为所求点（不包括 A 、 B 两点及在 A 、 B 两点所在直线上的点），作 BA 的中垂线，所交格点即为所求点。



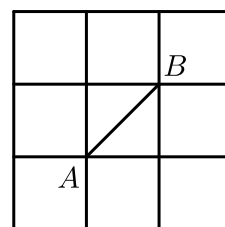
方法二：如图：分情况讨论．



- ①当 AB 为等腰 $\triangle ABC$ 的底边时，符合条件的 C 点有4个；
 ②当 AB 为等腰 $\triangle ABC$ 其中的一条腰时，符合条件的 C 点有4个．
 故选C．

【标注】【知识点】等腰三角形的存在性

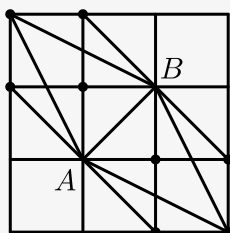
6. 如图，正方形网格中的每个小正方形边长都是1，已知 A, B 是两格点，若 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，且 $S_{\triangle ABC} = 1.5$ ，则满足条件的格点 C 有（ ）．



- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

【答案】 B

【解析】 如图，分情况讨论：



- ① AB 为等腰 $\triangle ABC$ 底边时，符合 $\triangle ABC$ 为等腰三角形的 C 点有4个；
 ② AB 为等腰 $\triangle ABC$ 其中的一条腰时，符合 $\triangle ABC$ 为等腰三角形的 C 点有4个，

因为 $S_{\triangle ABC} = 1.5$,

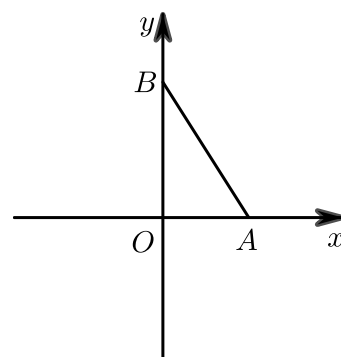
所以满足条件的格点 C 只有两个,如图中黑色的点.

故选B.

【标注】【知识点】等腰三角形的存在性

栗子4

7. 如图,点 A 、 B 分别在两条坐标轴上,且 $OB = 2AO$,在坐标轴上取一点 P ,使得 $\triangle PAB$ 为等腰三角形,则符合条件的点 P 共有().



- A. 5个 B. 6个 C. 7个 D. 8个

【答案】D

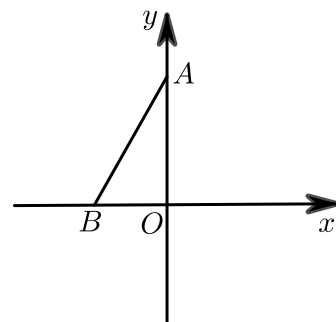
【解析】当 P 在 x 轴上时, $AB = AP$ 时, P 点有2个, $BP = AP$ 时, P 点有1个, $AB = BP$ 时, P 点有1个,

当 P 在 y 轴上时, $AB = BP$ 时, P 点有2个, $BP = AP$ 时, P 点有1个, $AB = AP$ 时, P 点有1个,

综上所述:符合条件的 P 点有8个,故答案为:8.

【标注】【知识点】等腰三角形的存在性

8. 如图,在平面直角坐标系中,点 A 、 B 分别在 y 轴和 x 轴上, $\angle ABO = 60^\circ$,在坐标轴上找一点 P ,使得 $\triangle PAB$ 是等腰三角形,则符合条件的点 P 共有 _____ 个.



【答案】6

【解析】①当 $AB = AP$ 时，在 y 轴上有2点满足条件的点 P ，在 x 轴上有1点满足条件的点 P 。

②当 $AB = BP$ 时，在 y 轴上有1点满足条件的点 P ，在 x 轴上有2点满足条件的点 P ，有1点与 $AB = AP$ 时的 x 轴正半轴的点 P 重合。

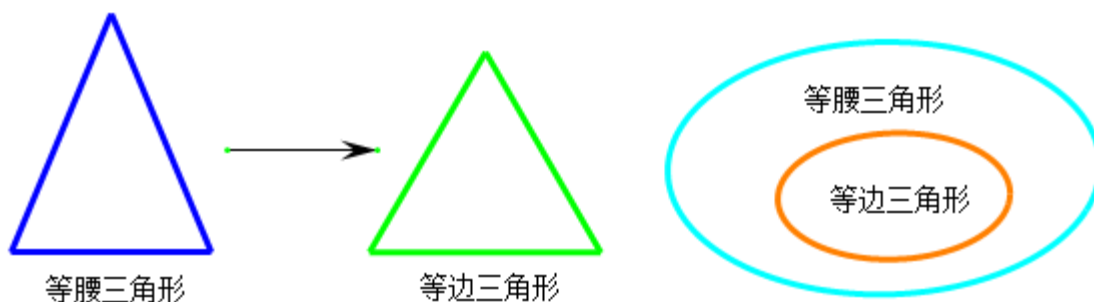
③当 $AP = BP$ 时，在 x 轴、 y 轴上各有一点满足条件的点 P ，有1点与 $AB = AP$ 时的 x 轴正半轴的点 P 重合。

综上所述：符合条件的点 P 共有6个。

【标注】【知识点】等腰三角形的存在性

三、等边三角形

1. 等边三角形的概念



定义：三边都相等的三角形叫做等边三角形。

栗子6

9. 在下列结论中：

- ①有一个外角是 120° 的等腰三角形是等边三角形；
- ②有两个外角相等的等腰三角形是等边三角形；

③有一边上的高也是这边上的中线的等腰三角形是等边三角形；

④有一个角是 60° ，且是轴对称的三角形是等边三角形．

其中正确的个数是（ ）．

A. 4个

B. 3个

C. 2个

D. 1个

【答案】C

【解析】①因为外角和与其对应的内角的和是 180° ，已知有一个外角是 120° ，即是有一个内角是 60° ，有一个内角为 60° 的等腰三角形是等边三角形，该结论正确，

②两个外角相等说明该三角形中两个内角相等，而等腰三角形的两个底角是相等的，故不能确定该三角形是等边三角形，该结论错误，

③等腰三角形的底边上的高和中线本来就是重合的，“有一边”可能是底边，故不能保证该三角形是等边三角形，该结论错误，

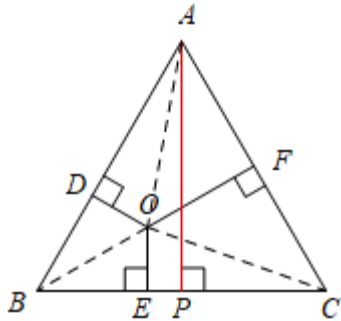
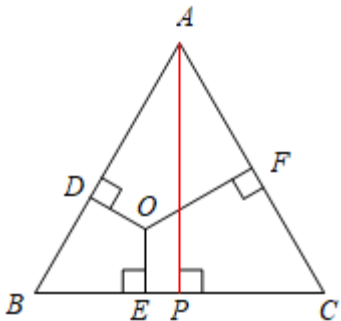
④是轴对称的三角形一定是等腰三角形，又有一个角是 60° ，一定是等边三角形，该结论正确，
故选C．

【标注】【知识点】等边三角形的判定

2. 等边三角形的性质

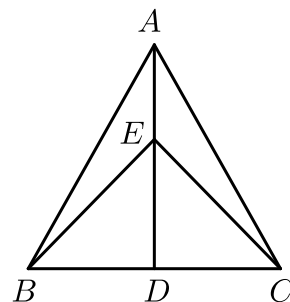
性质1	等边三角形的 <u>三条边</u> 都相等
性质2	等边三角形的 <u>三个角</u> 都相等，并且每一个角都等于 60°
性质3	等边三角形每条边上的 <u>高线</u> 、 <u>中线</u> 、所对角的 <u>角平分线</u> 互相重合（ <u>三组</u> “三线合一”）

等边三角形内任意一点到三边距离和是一个定值，等于一边上的高



【备注】利用等面积法进行证明，分别连接三角形顶点与内部一点，将三角形的面积分为三个小三角形，利用三个三角形的面积和等于该等边三角形的面积进行推导。

10. 如图，在等边三角形 ABC 中， $AD \perp BC$ ，垂足为 D ，点 E 在线段 AD 上， $\angle EBC = 45^\circ$ ，则 $\angle ACE$ 等于（ ）。



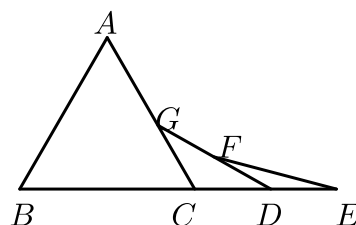
- A. 15° B. 30° C. 45° D. 60°

【答案】A

【解析】 $\because$ 在等边三角形 ABC 中， $AD \perp BC$ ，
 $\therefore BD = CD$ ，即： AD 是 BC 的垂直平分线，
 $\because$ 点 E 在 AD 上，
 $\therefore BE = CE$ ，
 $\therefore \angle EBC = \angle ECB$ ，
 $\because \angle EBC = 45^\circ$ ，
 $\therefore \angle ECB = 45^\circ$ ，
 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，
 $\therefore \angle ACB = 60^\circ$ ，
 $\therefore \angle ACE = \angle ACB - \angle ECB = 15^\circ$ ，
 故选：A。

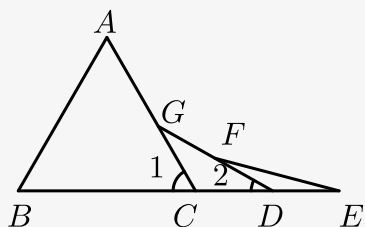
【标注】【知识点】等边三角形的性质

11. 如图，已知 $\triangle ABC$ 是等边三角形，点 B 、 C 、 D 、 E 在同一直线上，且 $CG = CD$ ， $DF = DE$ ，则 $\angle E =$ _____ 度。



【答案】 15

【解析】 方法一：如图所示，



$\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle B = \angle 1 = 60^\circ$.

$\because CD = CG$,

$\therefore \angle CGD = \angle 2$,

$\therefore \angle 1 = 2\angle 2$.

同理有 $\angle 2 = 2\angle E$,

$\therefore 4\angle E = 60^\circ$,

$\therefore \angle E = 15^\circ$.

方法二： $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，

$\therefore \angle ACB = 60^\circ$, $\angle ACD = 120^\circ$,

$\because CG = CD$,

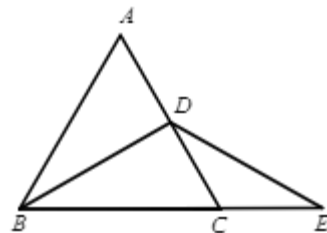
$\therefore \angle CDG = 30^\circ$, $\angle FDE = 150^\circ$,

$\because DF = DE$,

$\therefore \angle E = 15^\circ$.

【标注】 【知识点】 等边三角形的性质

12. 如图，等边 $\triangle ABC$ 的周长是12cm， D 是 AC 边上的中点， E 在 BC 的延长线上，若 $DE = DB$ ，则 CE 的长为 _____ .



【答案】 2cm

【解析】 $\because D$ 是等边 $\triangle ABC$ 的 AC 边上的中点，

$$\therefore BD \perp AC, \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle DBC = 30^\circ,$$

$$\therefore DE = DB,$$

$$\therefore \angle E = \angle DBC = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle ACB = \angle E + \angle CDE,$$

$$\therefore \angle CDE = 30^\circ,$$

$$\therefore CE = CD,$$

$$\therefore \triangle ABC \text{的周长是} 12\text{cm},$$

$$\therefore AB = AC = BC = 12 \div 3 = 4\text{cm},$$

$\because D$ 是等边 $\triangle ABC$ 的 AC 边上的中点，

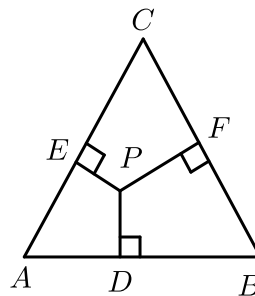
$$\therefore CD = \frac{1}{2}AC = 2\text{cm},$$

$$\therefore CE = 2\text{cm}.$$

【标注】【知识点】等腰及等边三角形的综合

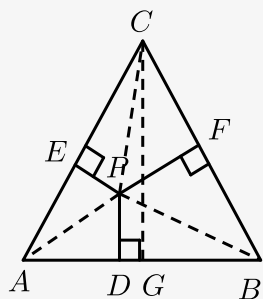
栗子6

13. 如图，已知等边三角形 ABC 的高为7cm， P 为 $\triangle ABC$ 内一点， $PD \perp AB$ 于点 D ， $PE \perp AC$ 于点 E ， $PF \perp BC$ 于点 F ，则 $PD + PE + PF =$ _____.



【答案】7cm

【解析】连结 PA 、 PB 、 PC ，作 AB 边上的高 CG ，如图所示：



$$\begin{aligned}
 &\because S_{\triangle ABP} + S_{\triangle BCP} + S_{\triangle ACP} = S_{\triangle ABC}, \\
 &\therefore \frac{1}{2}AB \cdot PD + \frac{1}{2}BC \cdot PF + \frac{1}{2}AC \cdot PE = \frac{1}{2}AB \cdot CG, \\
 &\because \triangle ABC \text{ 是等边三角形}, \\
 &\therefore AB = BC = AC, \\
 &\therefore \frac{1}{2}AB(PD + PF + PE) = \frac{1}{2}AB \cdot CG, \\
 &\therefore PD + PF + PE = CG = 7\text{cm}.
 \end{aligned}$$

故答案为：7cm .

【标注】【知识点】等边三角形的性质

栗子7

14. 如图1, $\triangle ABD$, $\triangle ACE$ 都是等边三角形.

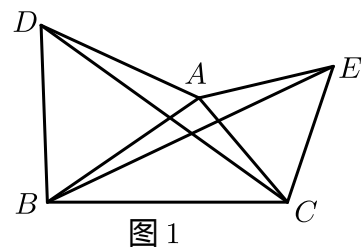


图 1

- (1) 求证： $\triangle ABE \cong \triangle ADC$.
- (2) 若 $\angle ACD = 15^\circ$, 求 $\angle AEB$ 的度数.
- (3) 如图2, 当 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ACE$ 的位置发生变化, 使C、E、D三点在一条直线上, 求证： $AC \parallel BE$.

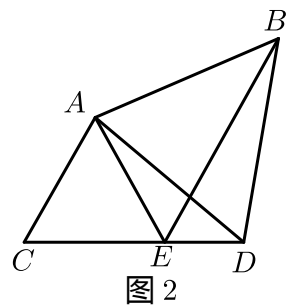


图 2

【答案】(1) 证明见解析 .

(2) $\angle AEB = 15^\circ$.

(3) 证明见解析 .

【解析】(1) $\because \triangle ABD, \triangle ACE$ 都是等边三角形 ,

$$\therefore AB = AD, AE = AC,$$

$$\angle DAB = \angle EAC = 60^\circ .$$

$$\therefore \angle DAC = \angle BAE .$$

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle ADC$ 中 ,

$$\therefore \begin{cases} AB = AD \\ \angle BAE = \angle DAC, \\ AE = AC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADC .$$

(2) 由 (1) 知 $\triangle ABE \cong \triangle ADC$,

$$\therefore \angle AEB = \angle ACD .$$

$$\because \angle ACD = 15^\circ ,$$

$$\therefore \angle AEB = 15^\circ .$$

(3) 同上可证 : $\triangle ABE \cong \triangle ADC$,

$$\therefore \angle AEB = \angle ACD .$$

$$\text{又} \because \angle ACD = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle AEB = 60^\circ$$

$$\because \angle EAC = 60^\circ ,$$

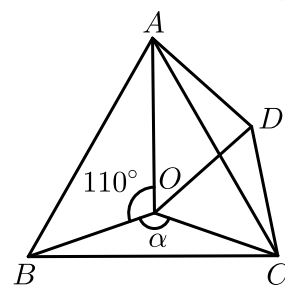
$$\therefore \angle AEB = \angle EAC ,$$

$$\therefore AC \parallel BE .$$

【标注】【知识点】等边三角形与全等

独步天下2

15. 如图 , 点 O 是等边 $\triangle ABC$ 内一点 , D 是 $\triangle ABC$ 外的一点 , $\angle AOB = 110^\circ$, $\angle BOC = \alpha$, $\triangle BOC \cong \triangle ADC$, $\angle OCD = 60^\circ$, 连接 OD .



- (1) 求证： $\triangle OCD$ 是等边三角形．
- (2) 当 $\alpha = 150^\circ$ 时，试判断 $\triangle AOD$ 的形状，并说明理由．
- (3) 探究：当 α 为多少度时， $\triangle AOD$ 是等腰三角形．

【答案】 (1) 证明见解析．

(2) $\triangle AOD$ 为直角三角形，证明见解析．

(3) 当 $\alpha = 125^\circ$ 或 140° 或 110° 时， $\triangle AOD$ 是等腰三角形．

【解析】 (1) $\because \triangle BOC \cong \triangle ADC$,

$$\therefore OC = DC ,$$

$$\text{又} \because \angle OCD = 60^\circ ,$$

$\therefore \triangle OCD$ 是等边三角形．

(2) $\because \triangle BOC \cong \triangle ADC$,

$$\therefore \angle ADC = \angle BOC = \alpha = 150^\circ ,$$

$\text{又} \because \triangle OCD$ 是正三角形 ,

$$\therefore \angle ODC = 60^\circ ,$$

$$\therefore \angle ADO = \angle ADC - \angle ODC = 90^\circ ,$$

$\therefore \triangle AOD$ 为直角三角形．

(3) $\angle AOD = 360^\circ - \angle AOB - \angle COD - \angle BOC = 190^\circ - \alpha$,

$$\angle ADO = \angle ADC - \angle CDO = \alpha - 60^\circ ,$$

$$\angle OAD = 180^\circ - \angle AOD - \angle ADO = 50^\circ ,$$

$$\textcircled{1} \angle AOD = \angle ADO ,$$

$$\text{即} 190^\circ - \alpha = \alpha - 60^\circ , \text{得} \alpha = 125^\circ ,$$

$$\textcircled{2} \angle AOD = \angle OAD,$$

$$\text{即 } 190^\circ - \alpha = 50^\circ, \text{ 得 } \alpha = 140^\circ,$$

$$\textcircled{3} \angle ADO = \angle OAD,$$

$$\text{即 } \alpha - 60^\circ = 50^\circ, \text{ 得 } \alpha = 110^\circ,$$

故当 $\alpha = 125^\circ$ 或 140° 或 110° 时, $\triangle AOD$ 是等腰三角形.

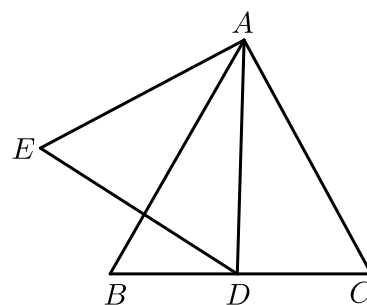
【标注】【知识点】等边三角形的判定

3. 等边三角形的判定

判定1	利用定义来判定： <u>三条边都相等</u> 的三角形是等边三角形（ <u>从边入手</u> ）
判定2	<u>三个角都相等</u> 的三角形是等边三角形（或证明两个角都为 <u>60°</u> ）（ <u>从角入手</u> ）
判定3	有一个角是 <u>60°</u> 的 <u>等腰三角形</u> 是等边三角形（ <u>从边角入手</u> ）

栗子8

16. 如图, $\triangle ABC$ 是等边三角形, AD 是高, 并且 AB 恰好是 DE 的垂直平分线, 求证: $\triangle ADE$ 是等边三角形.



【答案】证明见解析.

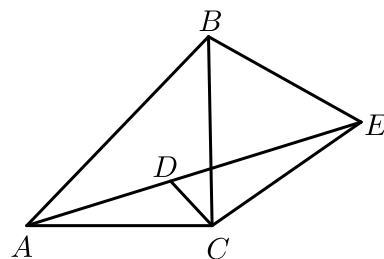
【解析】 $\because A$ 在 DE 的垂直平分线上,

$$\therefore AE = AD,$$

$\therefore \triangle ADE$ 是等腰三角形 ,
 $\therefore AB \perp DE$,
 $\therefore \angle ADE = 90^\circ - \angle BAD$,
 $\therefore AD \perp BD$,
 $\therefore \angle B = 90^\circ - \angle BAD$,
 由 $\angle ADE = 90^\circ - \angle BAD$, $\angle B = 90^\circ - \angle BAD$,
 得 : $\angle B = \angle ADE = 60^\circ$,
 $\therefore$ 等腰 $\triangle ADE$ 是等边三角形 .

【标注】【知识点】等边三角形的判定

17. 如图, 等腰直角 $\triangle ABC$ 中, $CA = CB$, 点 E 为 $\triangle ABC$ 外一点, $CE = CA$, 且 CD 平分 $\angle ACB$ 交 AE 于 D , 且 $\angle CDE = 60^\circ$.



- (1) 求证 : $\triangle CBE$ 为等边三角形 .
 (2) 若 $AD = 5$, $DE = 7$, 求 CD 的长 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 2 .

【解析】 (1) $\because CA = CB$, $CE = CA$,

$$\therefore BC = CE$$
 , $\angle CAE = \angle CEA$,

$$\because CD \text{ 平分 } \angle ACB \text{ 交 } AE \text{ 于 } D$$
 , 且 $\angle CDE = 60^\circ$,

$$\therefore \angle ACD = \angle DCB = 45^\circ$$
 , $\angle DAC + \angle ACD = \angle EDC = 60^\circ$,

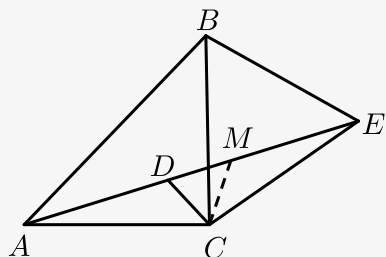
$$\therefore \angle DAC = \angle CEA = 15^\circ$$
 ,

$\therefore \angle ACE = 150^\circ$,
 $\therefore \angle BCE = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle CBE$ 为等边三角形 .

(2) 在 AE 上截取 $EM = AD$, 连接 CM .

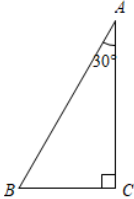
在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ECM$ 中 ,

$$\begin{cases} AD = EM \\ \angle DAC = \angle MEC , \\ AC = EC \end{cases}$$
 $\therefore \triangle ACD \cong \triangle ECM (SAS)$,
 $\therefore CD = CM$,
 $\therefore \angle CDE = 60^\circ$,
 $\therefore \triangle MCD$ 为等边三角形 ,
 $\therefore CD = DM = 7 - 5 = 2$.



【标注】【知识点】等边三角形与全等

4. 含 30° 的直角三角形

图形	定理	符号语言
	在直角三角形中，如果一个锐角等于 30° ，那么它所对的 <u>直角边</u> 等于斜边的 <u>一半</u> .	在 $\text{Rt } \triangle ABC$ 中 , $\therefore \angle C = 90^\circ, \angle A = 30^\circ$ $\therefore BC = \frac{1}{2}AB$

【备注】【注意】

此性质适用的大前提“直角三角形”，所以无直角时，必须依据条件构造符合性质特征的直角三角形，才能根据角的大小，得到边的倍分关系 .

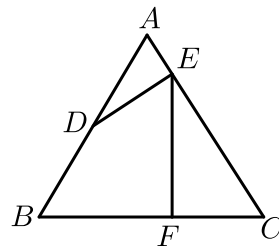
【证明】

$\triangle ADC$ 是 $\triangle ABC$ 的轴对称图形 ,
 因此 $AB = AD$, $\angle BAD = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$,
 从而 $\triangle ABD$ 是一个等边三角形 .

再由 $AC \perp BD$ ，可得 $BC = CD = \frac{1}{2}AB$ ，
证毕．

栗子8

18. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 的中点， $DE \perp AC$ 于 E ， $EF \perp BC$ 于 F ，已知 $AB = 8$ ，则 BF 的长为（ ）．



- A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

【答案】C

【解析】 $\because$ 在等边 $\triangle ABC$ 中， D 是 AB 的中点， $AB = 8$ ，

$$\therefore AD = 4, AC = 8, \angle A = \angle C = 60^\circ,$$

$\because DE \perp AC$ 于 E ， $EF \perp BC$ 于 F ，

$$\therefore \angle AED = \angle CFE = 90^\circ,$$

$$\therefore AE = \frac{1}{2}AD = 2,$$

$$\therefore CE = 8 - 2 = 6,$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}CE = 3,$$

$$\therefore BF = 5.$$

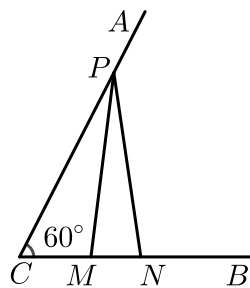
故选C．

【标注】【能力】运算能力

【知识点】等边三角形的性质

栗子9

19. 如图，已知 $\angle ACB = 60^\circ$ ， $PC = 12$ ，点 M ， N 在边 CB 上， $PM = PN$ ．若 $MN = 3$ ，则 CM 的长为（ ）．



A. 3

B. 3.5

C. 4

D. 4.5

【答案】 D

【解析】 过点 P 作 $PD \perp CB$ 于点 D ,

$\because \angle AOB = 60^\circ, PD \perp CB, PC = 12,$

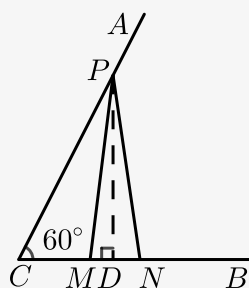
$\therefore DC = 6,$

$\because PM = PN, MN = 3, PD \perp CB,$

$\therefore MD = ND = 1.5,$

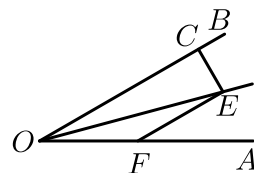
$\therefore CM = 6 - 1.5 = 4.5.$

故选: D.



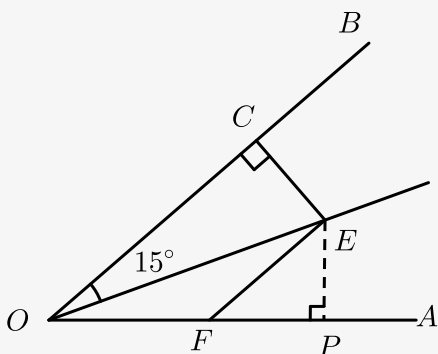
【标注】 【知识点】 30° 特殊角的性质应用

20. 如图, $\angle AOE = \angle BOE = 15^\circ, EF \parallel OB, EC \perp OB$, 若 $EC = 2$, 则 $EF =$ _____.



【答案】 4

【解析】 过 E 作 $EP \perp OA$,



$\because \angle AOE = \angle BOE = 15^\circ, EC \perp OB, EP \perp OA,$

$$\therefore CF \perp PE = 2 ,$$

$$\therefore EF // OB ,$$

$$\therefore \angle EFP = \angle BOA = \angle BOE + \angle AOE = 30^\circ ,$$

$$\therefore EF = 2EP = 4 .$$

【标注】【知识点】30°特殊角的性质应用